



Numerical and Analysis of the Vortex Structure in  
a Hydraulic Jump on Rough Bed by Using  
Liutex-Rortex Method

---

Công Tý Trinh, Công Triệu Tran and Chí Thành Phạm

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

November 29, 2022

## Mô phỏng và phân tích diễn tiến cấu trúc xoáy trong nước nhảy trên đáy nhám sử dụng phương pháp Liutex/Rortex

Trịnh Công Tý<sup>1,2</sup>, Trần Công Triệu<sup>1\*</sup>, Phạm Chí Thành<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Bộ môn thủy lực-thủy văn, Trường Đại Học Xây dựng Hà Nội

<sup>2</sup> College of water resource & hydropower, Sichuan University, Chengdu 610065, China

\*Email: trieutc@huce.edu.vn

**Tóm tắt.** Hiện tượng nước nhảy là vấn đề thủy lực khá thú vị và phức tạp, nó được sử dụng nhiều trong thực tiễn để tiêu năng công trình thủy lợi-thủy điện. Với nước nhảy trên đáy nhám, qua thí nghiệm, nhiều đặc tính của nước nhảy đã được nghiên cứu như: độ sâu sau nước nhảy  $y_2$ , chiều dài nước nhảy  $L_j$ . Tuy nhiên việc hiểu về diễn tiến cấu trúc xoáy trong nước nhảy đáy nhám là một thách thức lớn đối với thực nghiệm và lý thuyết. Nghiên cứu này đã mô phỏng nước nhảy trên đáy nhám bằng mô hình thủy lực Flow-3D. Với các kết quả thu được, nhóm tác giả đã sử dụng một số phương pháp nhận diện xoáy để làm rõ diễn tiến cấu trúc xoáy trong nước nhảy đáy nhám. So với tiêu chí Q, phương pháp Liutex/Rortex hiệu quả hơn trong việc nhận diện xoáy. Diễn tiến hình thành, phát triển và phá vỡ của cấu trúc xoáy tại chân nước nhảy và khu vực đáy nhám đã phân tích và làm sáng tỏ. Kết quả cung cấp thêm hiểu biết về hiện tượng nước nhảy.

*Từ khóa:* CFD, Flow-3D, Nước nhảy, Phương pháp Liutex/Rortex, xoáy

### 1. Tổng quan

Trong những năm gần đây, sự phát triển nhanh chóng của công nghệ máy tính đã mở ra con đường mới cho sự phát triển của động lực học chất lỏng tính toán (CFD). Do vậy, mô hình và phương pháp tính toán đã ngày càng được cải thiện đáng kể. Nhiều nghiên cứu đã đề xuất cách tiếp cận phương pháp mới dựa trên CFD, trong đó vấn đề nhận diện cấu trúc xoáy trong nước nhảy ngày càng được quan tâm và nghiên cứu.

Nước nhảy là sự thay đổi đột ngột độ sâu dòng chảy, từ dòng chảy xiết sang dòng chảy êm. Nó được áp dụng trong lĩnh vực kỹ thuật để tiêu tán năng lượng của dòng chảy vận tốc cao trong các công trình thủy lợi-thủy điện, chẳng hạn như: đập tràn, cửa cống, v.v. Vận tốc dòng chảy ở hạ lưu thường rất lớn và động năng dư thừa của dòng chảy cần được tiêu tán trong một khoảng cách ngắn để bảo vệ nền của các công trình. Điều này là cần thiết để bảo vệ hạ lưu lòng sông, bờ sông khỏi bị xói lở, để đảm bảo công trình vận hành được an toàn và không bị phá hủy bởi dòng chảy vận tốc lớn. Do đó, nước nhảy được sử dụng như một công cụ hữu hiệu để tiêu tán năng lượng của dòng chảy sau công trình tháo lũ, thoát nước. Năng lượng của dòng chảy được chuyển hóa thành năng lượng hỗn loạn [1], gây ra sự xáo trộn dữ dội trong dòng chảy, cuốn theo không khí và độ sâu dòng chảy đồng thời tăng lên. Nhiều thập kỷ qua, nước nhảy trên đáy nhám đã được quan tâm và nghiên cứu bởi nhiều các tác giả [2-5]. Thông qua thực nghiệm, các tác giả [2, 6-8] nghiên cứu về nước nhảy trên đáy nhám chủ yếu với một số đặc trưng như: độ giảm độ sâu liên hiệp sau nước nhảy, chiều dài nước nhảy, tổn thất năng lượng, phân bố vận tốc, ứng suất đáy. Mặc dù vậy, những nghiên cứu này chủ yếu hướng vào hai mục tiêu ảnh hưởng trực tiếp tới quy mô, giá thành trình công trình tiêu năng là giảm chiều dài, chiều sâu sau nước nhảy. Những nghiên cứu chi tiết về cấu trúc dòng chảy trong nước nhảy đáy nhám, cụ thể hơn là cấu trúc xoáy vẫn chưa được quan tâm thỏa đáng và chưa cung cấp được cái nhìn trực quan về nó trong dòng chảy ba chiều. Gần đây, một phương pháp nhận diện xoáy mới tên là Liutex/Rortex đã được giới thiệu bởi Liu và cộng sự [9, 10]. Thông qua phương pháp này nhiều nghiên cứu đã được thực hiện để làm sáng tỏ cấu trúc xoáy trong dòng chảy. Phương pháp Liutex/Rortex đã được chứng minh mang lại độ chính xác và chất lượng tốt hơn trong xác định cấu trúc xoáy. Do đó, một phương pháp tốt như Liutex/Rortex cần được ứng dụng để phân tích diễn tiến cấu trúc xoáy trong nước nhảy trên đáy nhám.

Trong nghiên cứu này tập trung vào mô phỏng nước nhảy đáy nhám sử dụng mô hình thủy lực Flow-3D kết hợp với kết quả thực nghiệm của Bejestan and Neisi [3]. Cấu trúc xoáy được quan sát bởi tiêu chí  $Q$  [11] và phương pháp Liutex được thảo luận và so sánh để làm sáng tỏ diễn tiến của nó.

## 2. Phương pháp nghiên cứu

### 2.1 Lý thuyết mô hình toán

Mô hình thủy lực Flow-3D được sử dụng rộng rãi do khả năng xử lý được nhiều vấn đề thủy lực của dòng chảy. Flow-3D dựa trên phương pháp thể tích hữu hạn giải hệ phương trình bảo toàn khối lượng và động lượng Navier-Stokes. Hệ phương trình Reynolds trung bình Navier-Stokes (RANS) được viết dưới dạng:

- Phương trình liên tục:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

- Phương trình động lượng:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2)$$

Trong đó:  $\rho$  là mật độ;  $t$  là thời gian;  $u_i$  và  $u_j$  là các thành phần vận tốc;  $\mu$  là hệ số nhớt động lực học, và  $\mu_t$  hệ số nhớt dòng rối.

Mặc dù có nhiều mô hình rối như  $k-\varepsilon$ ,  $k-\omega$ , LES, DES v.v. trong Flow-3D, mô hình Renormalization Group (RNG  $k-\varepsilon$ ) được sử dụng rộng rãi cho các mô phỏng thủy lực nói chung, và nước nhảy [5, 12]. Vì vậy, trong nghiên cứu này sử dụng mô hình rối (RNG  $k-\varepsilon$ ).

### 2.2 Các phương pháp định nghĩa xoáy

Các phương pháp nhận dạng xoáy phổ biến hiện nay dựa trên phân tích của tensor gradient vận tốc  $\nabla V$ , chúng có thể được chia thành các phần đối xứng và phản đối xứng, như sau [13]:

$$\nabla V = \frac{1}{2}(\nabla V + \nabla V^T) + \frac{1}{2}(\nabla V - \nabla V^T) = A + B \quad (3)$$

Trong đó:  $A$  và  $B$  là các phần đối xứng và phản đối xứng của  $\nabla V$ .

#### a) Tiêu chí $Q$

Hunt, Wray [11] đã xác định các xoáy là vùng dòng chảy với biến thứ hai của  $\nabla V$  dương tức là  $Q > 0$ . Đối với dòng không nén được,  $Q$  có thể được viết là:

$$Q = \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|A\|^2) \quad (4)$$

trong đó  $\|A\|^2 = \text{tr}(AA^T)$  and  $\|B\|^2 = \text{tr}(BB^T)$ ;  $\| \cdot \|$  là tiêu chuẩn Frobenius.

Vùng có  $Q \geq 0$  có thể được coi là vùng xoáy.

Theo phương pháp này, một vùng dòng chảy xuất hiện dưới dạng xoáy nếu tốc độ quay cục bộ lớn hơn tốc độ biến dạng, tức là phần phản đối xứng của  $\nabla V$  chiếm ưu thế so với phần đối xứng. Có thể thấy rằng tiêu chí  $Q$  còn nhiều hạn chế, tuy nhiên nó đã được sử dụng phổ biến trong nhiều nghiên cứu và được chấp nhận.

#### b) Phương pháp Liutex/Rortex

Phương pháp Liutex/Rortex được định nghĩa là vector Liutex/Rortex, có thể biểu diễn rõ ràng cả hướng và độ lớn của chuyển động quay. Chi tiết về định nghĩa toán học của Liutex/Rortex có thể được tìm thấy trong Liu, Gao [10]. Dạng vector của Liutex/Rortex nhận được bằng cách:

$$\vec{R} = R\vec{r} \tag{5}$$

Độ lớn của R có thể đạt được qua công thức:

$$R = \langle \vec{\omega}, \vec{r} \rangle - \sqrt{\langle \vec{\omega}, \vec{r} \rangle^2 - 4\lambda_{ci}^2} \tag{6}$$

Véc tơ Liutex/Rortex có thể được định nghĩa:

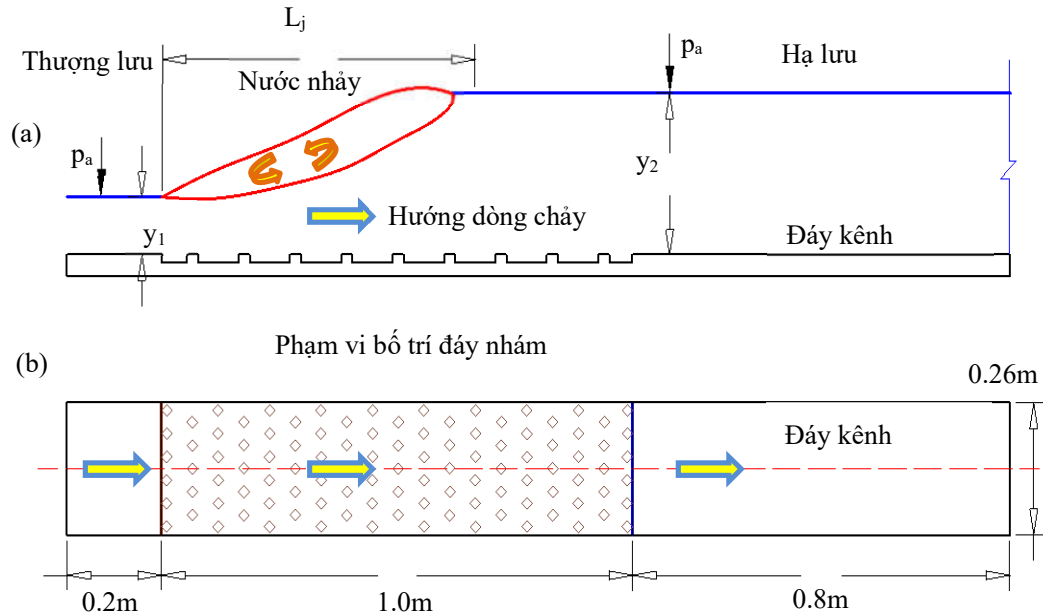
$$\vec{R} = \left\{ \langle \vec{\omega}, \vec{r} \rangle - \sqrt{\langle \vec{\omega}, \vec{r} \rangle^2 - 4\lambda_{ci}^2} \right\} \vec{r} \tag{7}$$

Trong đó  $\vec{r}$  và R tương ứng là hướng và độ lớn của Liutex/Rortex;  $\vec{\omega}$  véc tơ xoáy và  $\lambda_{ci}$  là phần ảo của giá trị ngưỡng.

Liutex/Rortex là một véc tơ có thể sử dụng không chỉ biểu diễn mặt đẳng trị Liutex/Rortex mà còn cả trường véc tơ Liutex/Rortex và độ cường độ xoáy để xác định cấu trúc xoáy.

### 2.3 Mô hình vật lý

Bài báo này sử dụng mô hình vật lý đã được giới thiệu bởi tác giả Bejestan and Neisi [3]. Sơ đồ thí nghiệm và các điều kiện biên cũng được sử dụng để mô phỏng hiện tượng nước nhảy trên đáy nhám (chiết tiết xem hình 1 và bảng 1). Trong thí nghiệm tác giả Bejestan and Neisi [3] sử dụng các phần tử nhám là các khối hình thoi có chiều cao 16mm, các cạnh 16mm. Các khối nhám được bố trí so le trên mặt bằng, khoảng cách biên các khối theo chiều rộng kênh dẫn là 22.6mm và khoảng cách hàng thứ nhất và hàng thứ 2 là 32mm.



Hình 1. (a) Sơ đồ nước nhảy trên đáy nhám; (b) Mặt bằng bố trí đáy nhám trên kênh dẫn

Bảng 1. Thông số thí nghiệm bởi tác giả Bejestan and Neisi [3]

$q$ ( $m^2/s$ )	$V_1$ ( $m/s$ )	$y_1$ ( $m/s$ )	$Fr_1$	$Re_1$	$y_2$ ( $m$ )	$L_j$ ( $m$ )
0.05314	2.657	0.02	6.00	52616.7	0.124	0.64

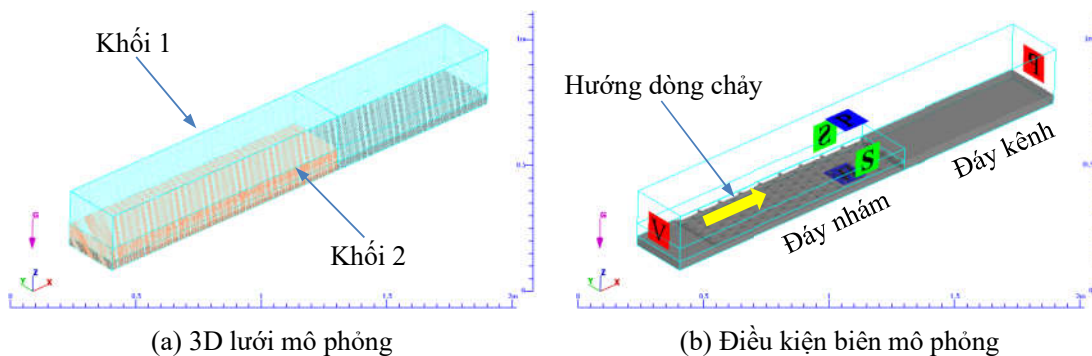
Trong đó:  $q$  là lưu lượng trên đơn vị chiều rộng kênh;  $V_1$  là vận tốc dòng chảy tại mặt cắt trước xảy ra nước nhảy;  $y_1$  là độ sâu dòng chảy tại mặt cắt trước nước nhảy,  $Fr_1$  là số Froude tại mặt cắt đầu vào nước nhảy;  $Re_1$  là số Reynolds tại mặt cắt đầu vào;  $y_2$  chiều sâu liên hiệp sau nước nhảy;  $L_j$  là chiều dài nước nhảy.

## 2.4 Mô hình toán

Trong khu vực nước nhảy chế độ thủy lực phức tạp nên cần chất lượng lưới tốt hơn so với khu vực hạ lưu dòng chảy. Do vậy, mô hình số được chia thành 2 khối như hình 2(a). Khối 1 toàn bộ mô hình, khối 2 là phần đáy nhám với kích thước lưới mịn hơn. Miền tính toán là lưới có cấu trúc với các phần tử là các khối hình hộp chữ nhật. Bước lưới được chọn nên là ước số của các kích thước hình học của công trình, ký hiệu theo 3 chiều tương ứng là  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  cụ thể ở bảng 2. Trong nghiên cứu này lựa chọn hai kích thước lưới khác nhau (lưới 1 là lưới thô, lưới 2 là lưới mịn) để tiến hành chạy mô phỏng và đánh giá kết quả sau mô phỏng. Kích thước lưới được lựa chọn theo kinh nghiệm nghiên cứu về mô hình thủy lực của tác giả cũng như các nhà nghiên cứu khác [5, 12, 14]. Lưới mô phỏng được minh họa ở Hình 2(a).

Bảng 2. Thông số kích thước lưới mô phỏng

Tên lưới	Khối 1 $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ (mm)	Khối 2 $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ (mm)
Lưới 1	5.0	2.5
Lưới 2	4.0	2.0



Hình 2. 3D lưới và điều kiện biên trong mô phỏng

Các điều kiện biên được thiết lập như sau: dòng chảy trong miền tính toán được đặt trong hệ tọa độ Đề các gồm 6 mặt. Thứ tự các mặt lần lượt là: tại lối vào biên thượng lưu ( $X_{min}$ ) được gán là vận tốc dòng chảy  $V_1$  cùng với mực nước đầu kênh  $y_1$ , tại đáy dòng chảy được xác định ở trạng thái chảy xiết với số Froude,  $Fr_1 = 6.0$ ; tại lối ra biên hạ lưu ( $X_{max}$ ) được gán là điều kiện biên áp suất ( $P$ ) với độ sâu dòng chảy ở hạ lưu  $y_2$ ; đáy kênh ( $Z_{min}$ ) được gán điều kiện biên như một tường cứng  $Z_{min}$  là tường (wall); biên cao nhất trên trục  $Z$  được gán như một biên áp suất, tại biên này là môi trường không khí,  $Z_{max}$  là  $P$

(atmospheric Pressure); biên theo phương Y gồm hai mặt được gán như là biên đối xứng:  $Y_{min}$  và  $Y_{max}$  là S (symmetry boundary). Bố trí các điều kiện biên trong mô hình mô phỏng nước nhảy được thể hiện như hình 2(b). Chi tiết giá trị điều kiện biên xem bảng 1.

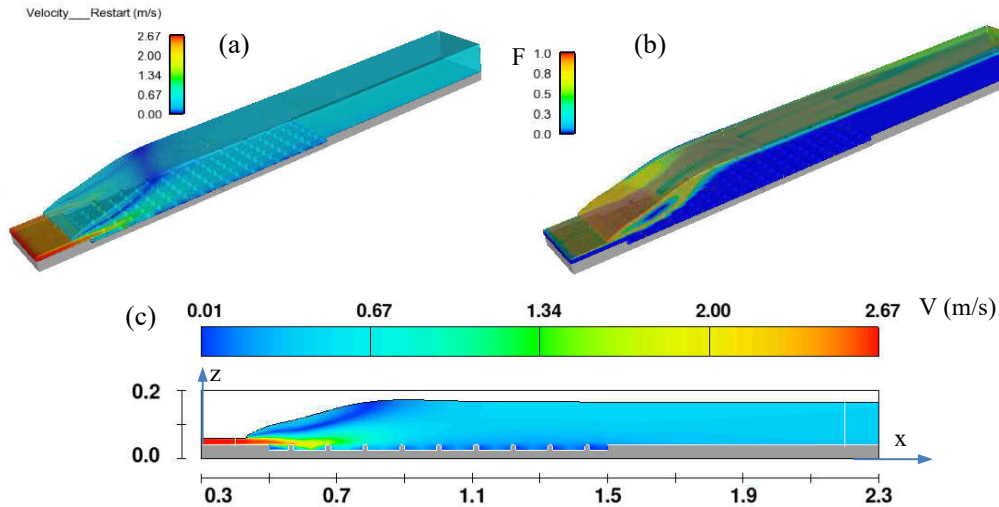
### 3. Kết quả và thảo luận

#### 3.1 Kiểm chứng kết quả mô phỏng số

Sau khi thu được kết quả đầu ra của mô hình số cho đường mặt nước trên kênh. Kết quả mô phỏng được so sánh với số liệu thí nghiệm của tác giả Bejestan and Neisi [3]. Trong nghiên cứu này, độ sâu liên hiệp sau nước nhảy ( $y_2$ ) được sử dụng để kiểm chứng sự phù hợp của mô hình số và thí nghiệm. Bảng 3 cho thấy sai số tương đối giữa kết quả đo độ sâu liên hiệp sau nước nhảy ( $y_2$ ) giữa thí nghiệm và mô phỏng số khá nhỏ, cụ thể với lưới 1 sai số tương đối là -3.06% và lưới 2 là -1.05%. Từ giá trị của sai số cho thấy kết quả mô phỏng số với lưới 1 và 2 đều khá tốt và phù hợp với kết quả thí nghiệm của Bejestan and Neisi [3]. Phương án lưới 2 cho kết quả tốt hơn. Do đó kết quả mô hình số của phương án lưới 2 được sử dụng để phân tích và thảo luận trong bài báo này. Một số kết quả mô phỏng được thể hiện ở Hình 3 cho thấy sự phù hợp tốt với kết quả thí nghiệm.

Bảng 3. So sánh giá trị độ sâu sau nước nhảy ( $y_2$ ) thí nghiệm [3] và kết quả mô phỏng

Lưới 1			Lưới 2		
$y_2$ -thí nghiệm (m)	$y_2$ -mô phỏng (m)	Sai số (%)	$y_2$ -thí nghiệm (m)	$y_2$ -mô phỏng (m)	Sai số (%)
0.124	0.1278	-3.06	0.124	0.1253	-1.05



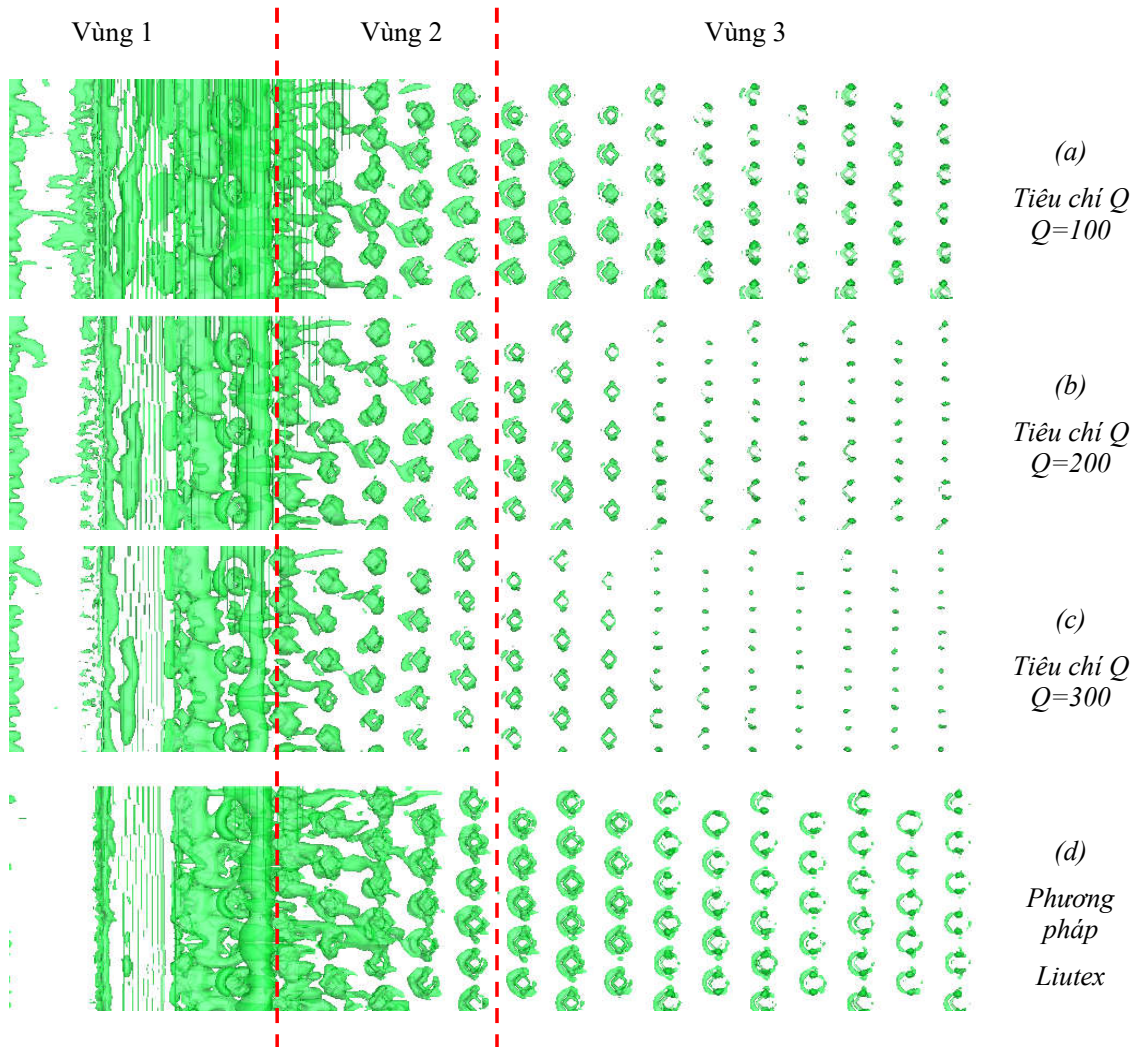
Hình 3. Kết quả mô phỏng số: (a) trường vận tốc 3D; (b) phân bố nồng độ không khí; (c) 2D trường vận tốc dòng chảy

#### 3.2 Cấu trúc xoáy phát triển trong nước nhảy đáy nhám

Đọc theo dòng chảy từ thượng lưu về hạ lưu kênh, chia dòng chảy thành 3 vùng: vùng 1 là vùng bắt đầu xuất hiện nước nhảy; vùng 2 là vùng nước nhảy; vùng 3 là vùng dòng chảy ổn định sau nước nhảy (hình 4). Hình 4 cho thấy sự so sánh diễn tiến cấu trúc xoáy được nhận diện bởi tiêu chí  $Q$  và phương pháp Liutex/Rortex. Các hình ảnh cho thấy có sự tương đồng về hình học giữa kết quả của tiêu chí  $Q$  và phương pháp Liutex/Rortex khi nhận diện cấu trúc xoáy. Tiêu chí  $Q$  có vùng giá trị khá rộng nên khó bắt được chính xác các cấu trúc xoáy, lựa chọn giá ngưỡng là một thách thức với các nhà nghiên

cứ. Với giá trị khác nhau thì cấu trúc xoáy cũng khác nhau như thể hiện trong hình 4(a), (b), và (c). Dưới ảnh hưởng của các mô nhám, cấu trúc xoáy bị phá vỡ (vortex breakdown) được nhận diện bằng tiêu chí  $Q$  xảy ra ở đầu vùng đáy nhám (vùng 2) ngay cả khi chọn giá trị ngưỡng nhỏ. Điều này chưa phản ánh đúng tính chất của nước nhảy vì tại vùng này nước nhảy vẫn tiếp tục diễn ra và làm tăng độ cao đường mặt nước. Ngoài ra, do ảnh hưởng của lớp biên, tại lõi vào nước nhảy xuất hiện vùng không phải xoáy.

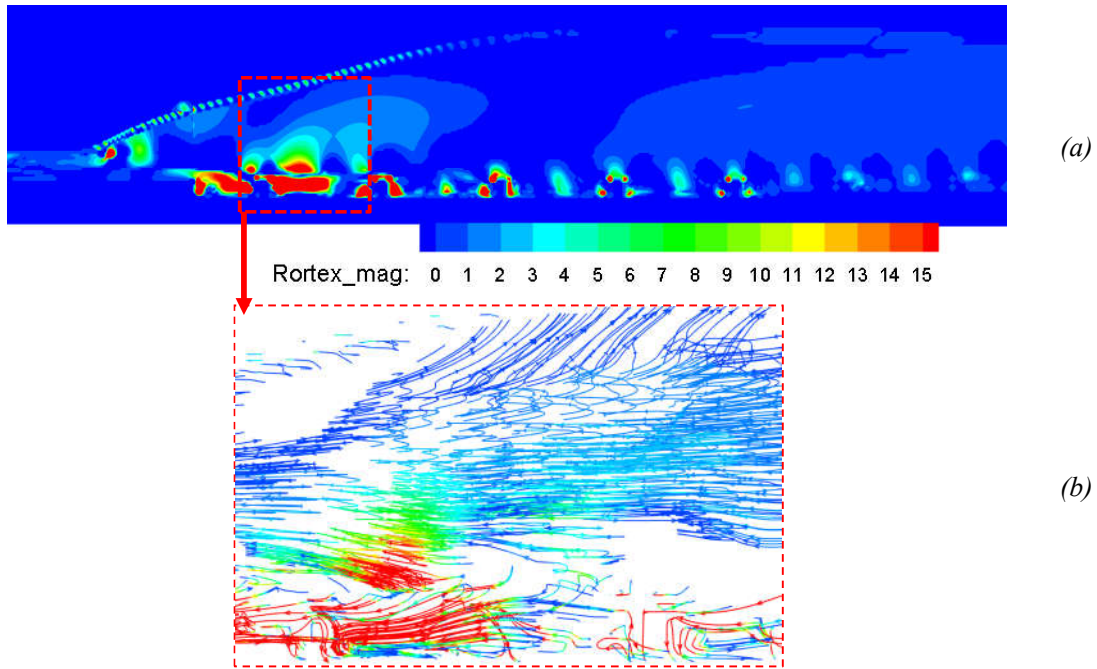
Phương pháp Liutex/Rortex đã được khẳng định là có thể nắm bắt thành công cấu trúc xoáy mà bỏ qua sự điều chỉnh chủ quan của các giá trị ngưỡng [10]. Hình 4(d) thể hiện cấu trúc xoáy nhận diện bởi phương pháp Liutex tại khu vực nước nhảy và dọc theo nền nhám được quan sát rõ ràng hơn. Khu vực xoáy yếu (vùng 3) và xoáy mạnh (vùng 1 và vùng 2) đều được quan sát thấy. Đồng thời phương pháp này cũng loại bỏ khá hiệu quả ảnh hưởng của lớp biên, thông qua lõi vào gần như xuất hiện vùng xoáy. Như vậy, chúng ta có thể thấy rằng, đối với khu vực nước nhảy, phương pháp Liutex/Rortex hoạt động tốt hơn tiêu chí  $Q$ . Dưới ảnh hưởng của nền nhám xoáy nhận diện bằng phương pháp Liutex/Rortex không bị phá vỡ ngay mà phát triển thành các cấu trúc sợi dây xoáy (vortex rope) men theo khoảng trống giữa các mô nhám hướng dòng chảy rồi mới bị phá vỡ (vortex breakdown).



Hình 4. Cấu trúc xoáy nhận diện bằng tiêu chí  $Q$  và phương pháp Liutex

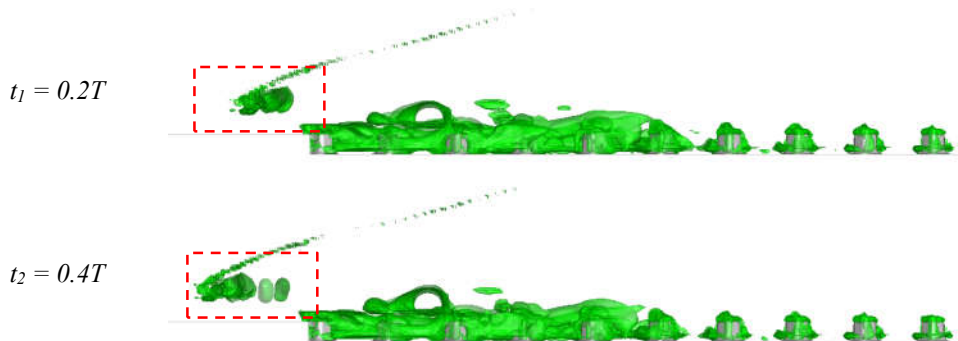


Hình 5(a) cung cấp cái nhìn rõ hơn về sự phát triển và ảnh hưởng của xoáy trong nước nhảy nền nhám. Có thể thấy xoáy xuất hiện ngay ở chân nước nhảy, và phát triển mạnh theo sự tăng lên của độ sâu dòng chảy. Tại vùng nước nhảy, xuất hiện xoáy ngược hướng dòng chảy như thể hiện hình 5(b), nó là một nguyên nhân quan trọng khiến cao độ mực nước tăng lên, nhờ vậy làm rõ ảnh hưởng của xoáy đến hình thành và phát triển của nước nhảy. Dưới tác dụng của nền nhám cấu trúc xoáy bị phá vỡ và giảm dần độ lớn xuôi về hạ lưu. Kết quả là mực nước sau nước nhảy được giữ ổn định. Qua đây cũng thêm sáng tỏ đặc tính tiêu tán năng lượng của nền nhám đối với hiện tượng nước nhảy.

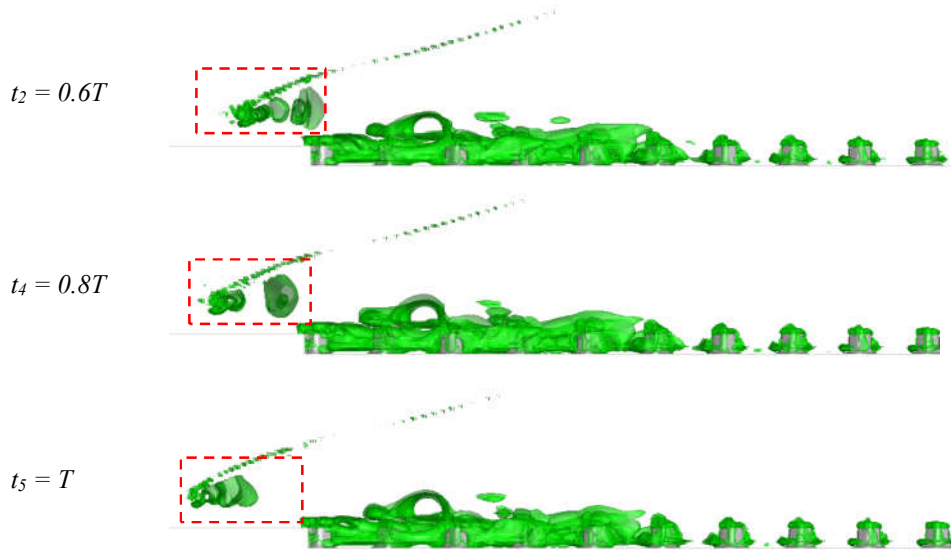


Hình 5. (a) Diễn tiến xoáy xảy ra dọc theo chiều dài nước nhảy, (b) Véc tơ xoáy

Hình 6 cho thấy sự hình thành, phát triển và phá vỡ của cấu trúc xoáy từ ngay tại chân nước nhảy (vùng khoanh nét đỏ). Nhận thấy rằng sự diễn tiến cấu trúc xoáy có tính chất tuần hoàn, xoáy được tạo ra thành từng khối với một chu kỳ cụ thể liên quan đến sự cuộn lên như con lăn ở chân của nước nhảy [15]. Hình ảnh cũng cho thấy tiến trình hình thành phát triển và phá vỡ của cấu trúc xoáy tại chân nước nhảy trong một chu kỳ  $T$  (giây). Mố nhám được bố trí có cao độ đỉnh bằng mặt đáy kênh để không xung đột trực tiếp với dòng chảy, dòng chảy ngay sau chân nước nhảy tại vị trí dãy mố nhám thứ 2 và 3 có cường độ xoáy lớn nhất và xuất hiện xoáy ngược (xem hình 5) tạo ra xoáy cuộn trên mặt mố nhám. Do đó cấu trúc xoáy ở giữa hai dãy mố nhám này khá ổn định, biến đổi nhỏ theo thời gian.







Hình 6. Diễn tiến hình thành, phát triển và phá vỡ của cấu trúc xoáy

#### 4. Kết luận

Nghiên cứu đã mô phỏng nước nhảy trên đáy nhám được bố trí bằng các khối hình thoi trên đáy kênh. Sử dụng mô phỏng số CFD kết hợp với mô hình rối RNG k- $\epsilon$ . Kết quả mô phỏng đã được so sánh và cho thấy phù hợp tốt với kết quả thí nghiệm. Một số đặc trưng thủy lực của hiện tượng nước nhảy như: phân bố vận tốc, hiện tượng hàm khí trong nước nhảy đã được thể hiện chi tiết.

Sử dụng tiêu chí  $Q$  và phương pháp Liutex/Rortex, nghiên cứu này đã phân tích sâu hơn về cấu trúc xoáy trong nước nhảy, qua đó phương pháp Liutex cho thấy hiệu quả vượt trội trong việc nhận diện cấu trúc xoáy. Sự hình thành, phát triển và phá vỡ các cấu trúc xoáy tại chân nước nhảy được phát hiện và phân tích chi tiết. Kết quả nghiên cứu này giúp các nhà khoa học nghiên cứu có cái nhìn thấu đáo hơn về diễn tiến xoáy, hiện tượng xoáy vỡ và ảnh hưởng của nó trong nước nhảy. So với lý thuyết về nước nhảy truyền thống đã bỏ qua các đặc trưng này khi thiết lập một số thông số chính của nước nhảy.

### Tài liệu tham khảo

1. Peterka, A., *Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators*. (1958).
2. Ead, S. and N. Rajaratnam. Hydraulic jumps on corrugated beds. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(7) (2002), pp. 656-663.
3. Bejestan, M.S. and K. Neisi. A new roughened bed hydraulic jump stilling basin. *Asian journal of applied sciences*, 2(5), (2009), pp. 436-445.
4. Ebrahimi, S., F. Salmasi, and A. Abbaspour. Numerical study of hydraulic jump on rough beds stilling basins. *Journal of Civil Engineering and Urbanism*, 3(1), (2013), pp. 19-24.
5. Nikmehr, S. and Y. Aminpour. Numerical Simulation of Hydraulic Jump over Rough Beds. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 64(2), (2020), pp. 396-407.
6. Tokyay, N.D., Effect of channel bed corrugations on hydraulic jumps, in *Impacts of Global Climate Change*. (2005). pp. 1-9.
7. Shafai-Bejestan, F.I.a.M. Corrugated bed hydraulic jump stilling basin. *Journal of Apply Sciences*, (2007), pp. 1164-1169.
8. Samadi-Boroujeni, H., et al. Effect of triangular corrugated beds on the hydraulic jump characteristics. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 40(9), (2013), pp. 841-847.
9. Dong, X., Y. Gao, and C. Liu. New normalized Rortex/vortex identification method. *Physics of Fluids*, 31(1), (2019).
10. Liu, C., et al., Third generation of vortex identification methods: Omega and Liutex/Rortex based systems. *Journal of Hydrodynamics*, 31(2), (2019), pp. 205-223.
11. Hunt, J.C., A.A. Wray, and P. Moin. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. *Proceedings of the Summer Program 1988 in its Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases*, Stanford, California, USA, (1988), pp. 193-208.
12. Ghaderi, A., et al. Numerical simulations of the flow field of a submerged hydraulic jump over triangular macroroughnesses. *Water*, 13(5), (2021), pp. 674.
13. Liu, C., et al. New omega vortex identification method. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 59(8), (2016), pp. 1-9.
14. Velioglu, D., N.D. Tokyay, and A. Dincer. A numerical and experimental study on the characteristics of hydraulic jumps on rough beds. in *E-proceedings of the 36th IAHR World Congress At: The Hague, The Netherlands*, (28), (2015), pp. 1-9.
15. Viti, N., D. Valero, and C. Gualtieri, *Numerical Simulation of Hydraulic Jumps. Part 2: Recent Results and Future Outlook*. *Water*, (2018), 11(1), 28.